

80

(1)

左辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 - y^2) &= \frac{dx^2}{dx} - \frac{dy^2}{dx} \\ &= 2x - \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 2x - 2y \frac{dy}{dx} \\ &= 2 \left(x - y \frac{dy}{dx} \right) \end{aligned}$$

右辺は定数だから, x で微分すると 0

よって, $x - y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \dots \textcircled{1}$

$x - y \frac{dy}{dx} = 0$ の両辺を x で微分すると,

左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x - y \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y \frac{dy}{dx} \right) \\ &= 1 - \left\{ \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right\} \\ &= 1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned}$$

これと右辺を微分すると 0 になることから, $1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

これに①を代入すると, $1 - \left(\frac{x}{y} \right)^2 - y \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}$

(2)

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(1 - \cos \theta) = \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\theta - \sin \theta) = 1 - \cos \theta$$

より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \frac{(1 - \cos \theta)' \sin \theta - (1 - \cos \theta)(\sin \theta)'}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin^3 \theta} \end{aligned}$$